Prednáška 1

1.1. Podmienky

- ☞ Účasť na prednáškach je nepovinná - zvážiť, lebo robí ”divy”
- ☞ Jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- ☞ Účasť na cvičeniach je povinná - viď podmienky na získanie ”zápočtu”
- ☞ Práca so skriptami, povinnou literatúrou a učebnicami je samozrejmosťou
- ☞ Viac hláv viac vie - je užitočné spojiť sily s ostatnými spolužiakmi
- ☞ Podmienky na skúšku (upresnené neskôr)

1.2. Sylabus

(I) Vektorový kalkulus

(i) Norma, normovaný priestor

(ii) Vektorové zobrazenia - krivky, plochy (variety), vektorové polia

(iii) Funkcie určené implicitne

(iv) Potenciál, divergencia, rotácia

(II) Regulárne transformácie

(III) Lebesgueov integrál

(i) Miera a aditívne funkcie

(ii) Konštrukcia Lebesgueovej miery

(iii) Merateľné a jednoduché funkcie

(iv) Konštrukcia Lebesgueovho integrálu a vzťahy integrálov

(IV) Parametrický integrál a konvolúcia

(V) Fubiniho veta, veta o transformácii

(VI) Integrovanie na varietách

(i) Krivkový integrál I. a II. druhu

(ii) Plošný integrál I. a II. druhu

(iii) Integrálne vety

(VII) Aplikácie vo fyzike

1.3. Normované priestory

Metrický priestor mohol vzniknúť na ľubovoľnej množine. Nasledujúci pojem k tomu potrebuje štruktúru lineárneho priestoru.

Definícia 1.3.1.

Normovaným lineárnym priestorom (NLP) nazývame lineárny (vektorový) priestor X nad telesom $\mathbb{K}$, na ktorom je daná nezáporná reálna funkcia $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}_0^+$ s nasledujúcimi vlastnosťami

- $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ pre každé $||\mathbf{x}||, ||\mathbf{y}|| \in X$
- $||\lambda\,\mathbf{x}|| = |\lambda|\,||\mathbf{x}||$ pre každé $\mathbf{x} \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$
- $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Takúto funkciu voláme norma a priestor vlastne tvorí dvojica $(X, ||\cdot||)$.

Poznámka 1.3.2.

Z definície je zrejmé, že každý prvok NLP má konečnú normu. Je dôležité si uvedomiť, že na jednom LP môžeme zaviesť aj viacero noriem, ktoré môžu viesť k rôznym vlastnostiam (u nekonečnorozmerných priestoroch). Preto ak hovoríme o NLP hovoríme o spomínanej dvojici. Pre dané vektorové priestory väčšinou používame tzv. prirodzené normy, ak to tak nie je, je potrebné to zdôrazniť.

Príklad 1.3.3.

Na reálnom Euklidovom priestore $\mathbb{R}^n$ možno zaviesť niekoľko noriem. Euklidovskou p-normou nazývame výraz $||\mathbf{x}||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$, $p \geq 1$ a podobne pre $p = \infty$ definujeme $||\mathbf{x}||_\infty = \sup_i |x_i|$.

Pre fixované $a_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ sa dá zaviesť tzv. eliptická norma: $||\mathbf{x}||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}}$.

Na komplexnom priestore $\mathbb{C}^n$ možno definovať aj tzv. hermitovskú normu $||\mathbf{z}||_2 = \sqrt{z_1\overline{z_1} + \cdots + z_n\overline{z_n}}$.

Problém 1.3.4.

Ktorý z priestorov $(\mathbb{R}^n, \max\{||\mathbf{x}||_1, ||\mathbf{x}||_e\})$, $(\mathbb{R}^n, \min\{||\mathbf{x}||_1, ||\mathbf{x}||_e\})$ je normovaný?

Nasledujúca definícia je niekedy uvedená ako tvrdenie (ekvivalencia sa zavádza ako generovanie rovnakej topológie).

Definícia 1.3.5.

Normy $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_\#$ v priestore X nazývame ekvivalentné, ak existujú kladné c_1, c_2 tak, že pre všetky $\mathbf{x} \in X$ platí

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_\# \leq \|\mathbf{x}\|_* \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_\# \,.$$

Veta 1.3.6.

V konečnorozmerných priestoroch sú všetky normy ekvivalentné.

Dôsledok 1.3.7.

Každý konečnorozmerný normovaný vektorový priestor je Banachov priestor.
Každý konečnorozmerný normovaný podpriestor LNP je uzavretý.

Poznámka 1.3.8.

V priestoroch nekonečnej dimenzie existujú neekvivalentné normy. Ekvivalencia noriem nám hovorí, že konvergencie v daných normách dávajú "rovnaké" výsledky.

Zrejme ak v NLP položíme $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, potom je ρ (translančne invariantná) metrika. Máme tak nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.3.9.

a) Každý NLP je tiež metrický priestor.

b) Gule v NLP sú konvexné.

Poznámka 1.3.10.

Pozor, na rozdiel od metrického priestoru, nie každá podmnožina lineárneho priestoru je lineárny priestor. Musí byť uzavretá na operácie sčítania a skalárneho násobenia.

Príklad 1.3.11.

V priestore $\mathbb{R}^2$ je zrejme $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ metrika a teda norma prvku $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Podobne vieme zaviesť aj iné normy odvodené z metrík na tomto priestore (maximová, taxikárska).

Veta 1.3.9 a) nám dáva návod ako preniesť dôležité pojmy z metrických priestorov do priestorov normovaných, napr. uzavretosť, konvergencia, úplnosť, hustota, separabilita atď. Norma prvku je vlastne jeho vzdialenosť od nulového prvku daného priestoru.

Definícia 1.3.12.

Majme NLP $(X,\|\cdot\|)$, potom hovoríme, že postupnosť prvkov $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje k $\mathbf{u}\in X$ v priestore X (t.j. v norme tohto priestoru), ak

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}\| = 0.$$

Označujeme to $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ v X. (Hovoríme tiež o tzv. silnej konvergencii, alebo konvergencii v norme.)

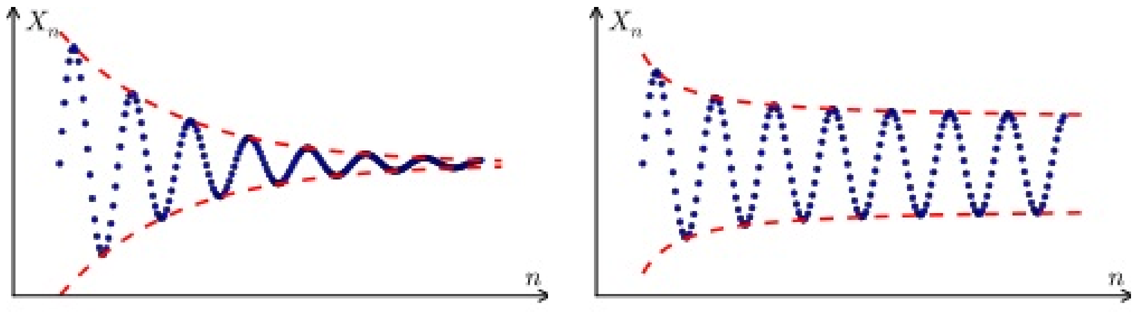
Poznámka 1.3.13.

Uzavretá guľa v LNP X je množina $\overline{B_r(\mathbf{a})} = \{\mathbf{x}\in X : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le r\}$. V nekonečno-rozmerných priestoroch môžu mať gule kontra-intuitívne vlastnosti. V $X = C([0,1])$ uvažujme cestu (krivku) $f_t(x) := 2|x-t|-1,\ t\in[0,1]$. Potom $\sup_{x\in[0,1]} |f_t(x)| = 1$, čo znamená, že celá leží na jednotkovej guli $B_1(\mathbf{0})$ v X. Navyše však platí, že jej celková dĺžka je rovná vzdialenosti prvkov f_0, f_1, keďže

$$\int_0^1 \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_t\right\|_\infty \mathrm{d}t = \int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 2$$

a aj $\|f_0-f_1\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_0(x)-f_1(x)| = 2 \sup_{x\in[0,1]} |f_0(x)| = 2.$

Nasledujúca veta nám dáva informáciu o dobrých vlastnostiach konvergencie v priestore s normou.



(a) Cauchyovská postupnosť

(b) Postupnosť, ktorá nie je cauchyovská. Prvky postupnosti sa nemôžu dostať ľubovoľne blízko seba pre "veľké"m, n.

Obr. 1.1: Fundamentálnosť postupností.

Veta 1.3.14.

Nech X je NLP nad $\mathbb{K}$. Nech $x_n, y_n \subset X$ konvergujú k x, resp. y v X a $\alpha_n \subset K$ konverguje k α v $\mathbb{K}$. Potom

(I) x je jediné a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ohraničená

(II) norma je rovnomerne spojitá funkcia,

(III) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$,

(IV) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$,

(V) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n x_n) = \alpha x$.

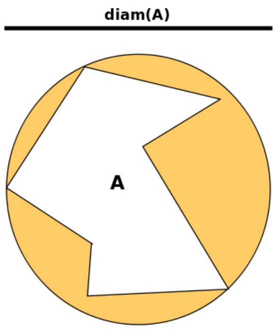
Niektoré postupnosti sa "spomaľujú"(vzdialenosti medzi ich členmi sa stále zmenšujú), ale nevieme, či existuje bod v priestore, ku ktorému by konvergovali. Odpoveď na túto informáciu je však dôležitá a tak zavádzame, podobne ako pre postupnosti čísel, pojem špeciálnej postupnosti prvkov.

Definícia 1.3.15.

Postupnosť prvkov $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ nazývame cauchyovská (fundamentálna), ak

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m\| = 0.$$

Zrejme každá konvergentná postupnosť je fundamentálna (stačí použiť trojuholníkovú nerovnosť), opak však



Obr. 1.2: Priemer množiny A.

vo všeobecnosti neplatí. Stačí uvažovať postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ na intervale $(0,2)$, ktorá je cauchyovská, ale nekonverguje na danom intervale, keďže $0 \notin (0,2)$. Podobne ak si vezmeme postupnosť čísel v $\mathbb{Q}$, tá môže konvergovať k číslu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (priestor $\mathbb{Q}$ nie je totiž úplný) - nájdite takú postupnosť. Taktiež je zrejmé, že každá cauchyovská postupnosť je ohraničená.

Zavádzame asi najdôležitejší pojem z funkcionálnej analýzy, ktorý je pomenovaný po poľskom matematikovi Stefanovi Banachovi.

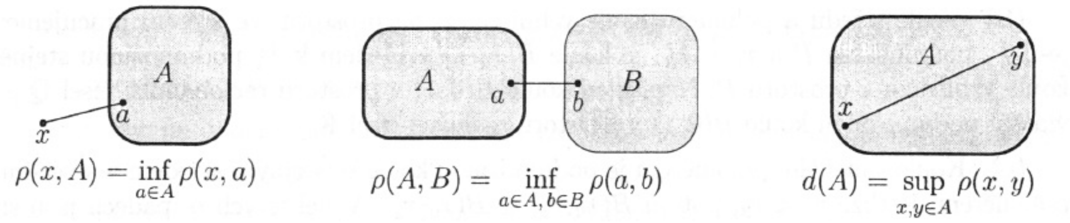
Definícia 1.3.16.

NLP $(X, \|\cdot\|)$ nazývame Banachov, ak je úplný (vzhľadom k metrike $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$), t.j. každá cauchyovská postupnosť $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje k nejakému prvku $\mathbf{u} \in X$.

Poznámka 1.3.17.

V metrických priestoroch platí, že úplná množina je uzavretá (naopak to platí iba v úplných priestoroch). Naozaj, ku každému $x^* \in \overline{M}$ existuje k nemu konvergujúca postupnosť. Ale tá je cauchyovská v M a je aj konvergentná (to vieme práve z úplnosti). Z jednoznačnosti limity preto $M = \overline{M}$.
Na rozdiel od uzavretosti, úplnosť nezávisí od priestoru, na ktorom ju uvažujeme a teda v tomto zmysle je to krajšia vlastnosť.

Ešte si zavedieme dôležité pojmy, ktoré sa prirodzeným spôsobom prenášajú z metrických priestorov.



Obr. 1.3: Vzdialenosti množín a prvkov.

Definícia 1.3.18.

Priemer množiny A v LNP X označíme ako

$$\mathrm{diam}(A) = \mathrm{d}(A) := \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in A} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in A} \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Vzdialenosť prvku $\mathbf{x}$ od množiny A v LNP X definujeme ako

$$\rho(\mathbf{x}, A) := \inf_{\mathbf{a}\in A} \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \inf_{\mathbf{a}\in A} \rho(\mathbf{x},\mathbf{a})$$

a vzdialenosť množiny B od A zasa ako

$$\rho(A, B) := \inf_{\mathbf{a}\in A,\mathbf{b}\in B} \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \inf_{\mathbf{a}\in A,\mathbf{b}\in B} \rho(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Priemer množiny A sa označuje aj diam(A), čo je skratka anglického slova diameter. O "rozmere-množiny vypovedá jej ohraničenosť (zrejme množina v LNP je ohraničená ak jej priemer je konečné číslo), o rozľahlosti zasa nasledujúci pojem. Pripomeňme, že v metrickom priestore M je $A \subset B$ hustá v B, ak $\overline{A} = B$, t.j. jej uzáver je celá množina B (napr. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$). Názov tejto vlastnosti vystihuje aj známy fakt v priestore $\mathbb{R}$, t.j., že akékoľvek dve reálne čísla môžu byť oddelené racionálnym číslom.

Definícia 1.3.19.

NLP $(X, \|\cdot\|)$ nazývame separabilný, ak obsahuje spočítateľnú hustú podmnožinu.

Príklad 1.3.20.

Zrejme každá množina, ktorá obsahuje spočítateľne veľa prvkov je separabilná.
Euklidovský priestor.
Priestor $C[a,b]$ s metrikou $d(f,g) = \max\limits_{a\le x\le b} |g(x) - f(x)|$ je separabilný.

Definícia 1.3.21.

Nech (X,d) je metrický priestor. Množina $A \subset X$ sa nazýva kompaktná, ak z každej postupnosti bodov množiny A možno vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá konverguje v množine A (t.j. konverguje a jej limita patrí do A). Budeme hovoriť, že metrický priestor (X,d) je kompaktný, ak množina X je kompaktná.

Príklad 1.3.22.

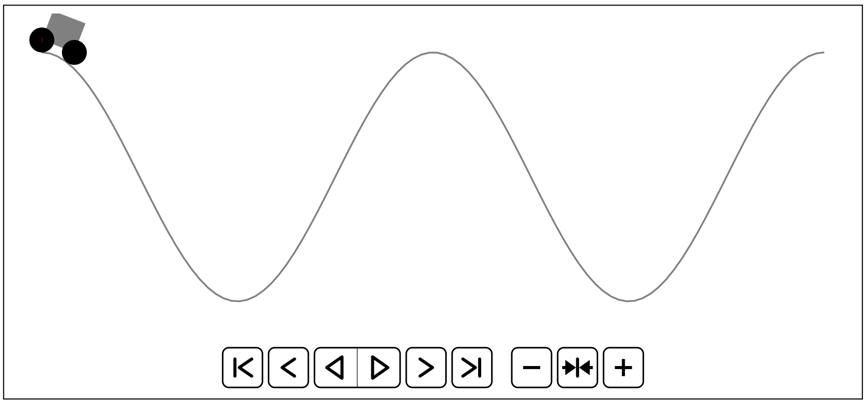
V množine reálnych čísel $\mathbb{R}$ je uzavretý interval $[0,1]$ kompaktnou množinou, ale interval $[0,1)$ alebo množina celých čísel $\mathbb{Z}$ nie (prečo?). Cantorova množina je kompakt.

Poznámka 1.3.23.

Podmnožina kompaktného priestoru je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá. Podmnožina Euklidovského priestoru je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.
Ak (X,d) je metrický priestor. Množina $A \subset X$ je kompaktná práve vtedy keď každé otvorené pokrytie množiny A má konečné podpokrytie.
Každý kompaktný metrický priestor je separabilný.

1.4. Vektorový kalkulus

Vo fyzike a iných oblastiach sa zaoberáme aj všeobecnejšími funkciami (zobrazeniami). V tejto kapitole sa budeme zaoberať premennými vektormi, závislými od premenných parametrov, ktorými môžu byť napr. čas, vzdialenosť od daného bodu alebo uhol dvoch ramien a pod. Niektoré vlastnosti týchto zobrazení budú rovnaké ako v prípade skalárnych funkcií (jednej alebo viacerých premenných).



Obr. 1.4: Projekcia pohybu do roviny.

Definícia 1.4.1.

$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \rho_n), \ \rho_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

otvorená guľa $\quad B(\mathbf{x_0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \rho_n(\mathbf{x_0}, \mathbf{x}) < r\}$

uzavretá guľa $\quad \overline{B}(\mathbf{x_0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \rho_n(\mathbf{x_0}, \mathbf{x}) \le r\}$

sféra $\quad S(\mathbf{x_0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \rho_n(\mathbf{x_0}, \mathbf{x}) = r\}$

Definícia 1.4.2.

Vektorovou funkciou vektorového argumentu nazývame zobrazenie

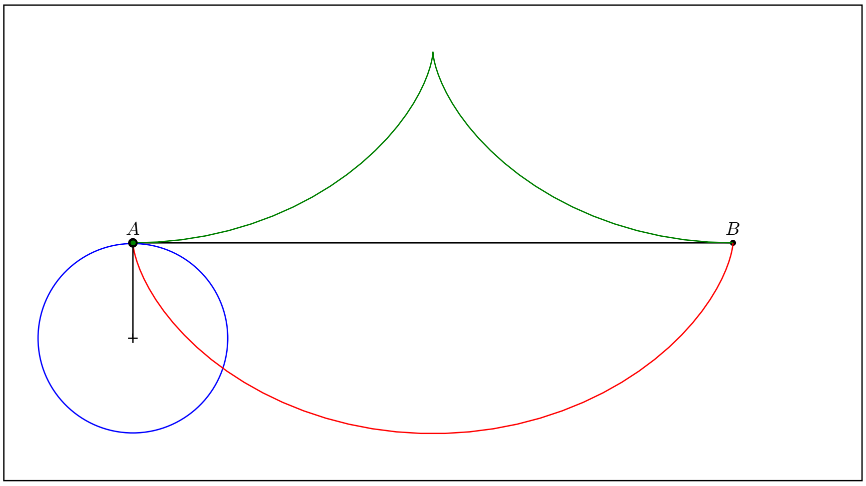
$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Označenie

$$u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \ u_2 = f_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n = f_n(x_1, \ldots, x_m),$$

respektíve $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Nazývajú sa aj súradnicové funkcie, či koordináty. Priestory $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ nazývame doména resp. kodoména, označujeme $\operatorname{dom} \mathbf{f}$, $\operatorname{codom} \mathbf{f}$. Definičný obor funkcie $D_\mathbf{f}$ je maximálna podmnožina $\operatorname{dom} \mathbf{f}$, pre ktorú je zobrazenie $\mathbf{f}$ dobre definované. Obor hodnôt zobrazenia $\mathbf{f}$ je množina $H_\mathbf{f} = \{\mathbf{y} \in \operatorname{codom} \mathbf{f} : \ \exists\, x \in D_\mathbf{f}, \ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$.

Teda každému m-rozmernému bodu je priradený n-rozmerný vektor. Uvedieme príklady.



Obr. 1.5: Cykloida generovaná valiacim sa kolesom.

Príklad 1.4.3.

$$\mathbf{r}(\alpha) = \begin{bmatrix} a\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} : [0, 2\pi) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ sú konštanty a α je uhol, predstavuje pohyb bodu po elipse s hlavnými polosami a, b.

Príklad 1.4.4.

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y + z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

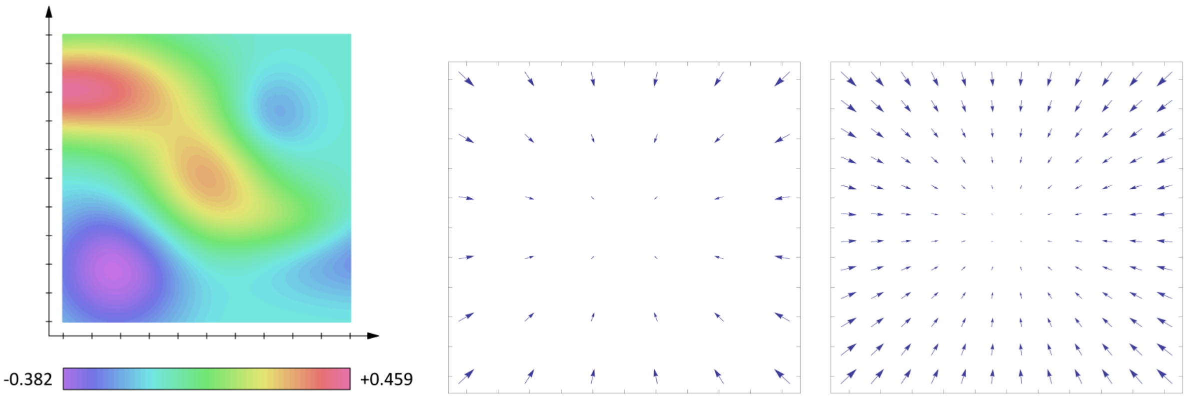
$D_{\mathbf{f}} = \mathbb{R}^3 = \operatorname{dom}\mathbf{f},\ H_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \subset \operatorname{codom}\mathbf{f}$

Príklad 1.4.5.

Majme bod $P = (x_0, y_0, z_0)$ a vektor $\mathbf{u}$ v $\mathbb{R}^3$, potom priamka prechádzajúca bodom P rovnobežná s vektorom $\mathbf{u}$ je daná parametricky ako $P + t\,\mathbf{u},\ -\infty < t < \infty$.

V literatúre sa často používajú tieto názvy pre jednotlivé dimenzie domény a kodomény pri danom zobrazení medzi euklidovskými priestormi:

- Krivky - $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$



(a) (b) (c)

Obr. 1.6: Skalárne pole a dve reprezentácie toho istého vektorového poľa $\mathbf{v}(x, y) = -\mathbf{r}$.

- Plochy - $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$
- Skalárne polia - $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- Vektorové polia - $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Pre reálne funkcie viacerých premenných je vhodné zaviesť aj pojem grafu funkcie.

Definícia 1.4.6.

Grafom zobrazenia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je množina usporiadaných dvojíc $(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}$. Označenie $\mathrm{gr}(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$

Grafom skalárnej funkcie dvoch premenných je teda nejaká plocha v $\mathbb{R}^3$. Napríklad

Príklad 1.4.7.

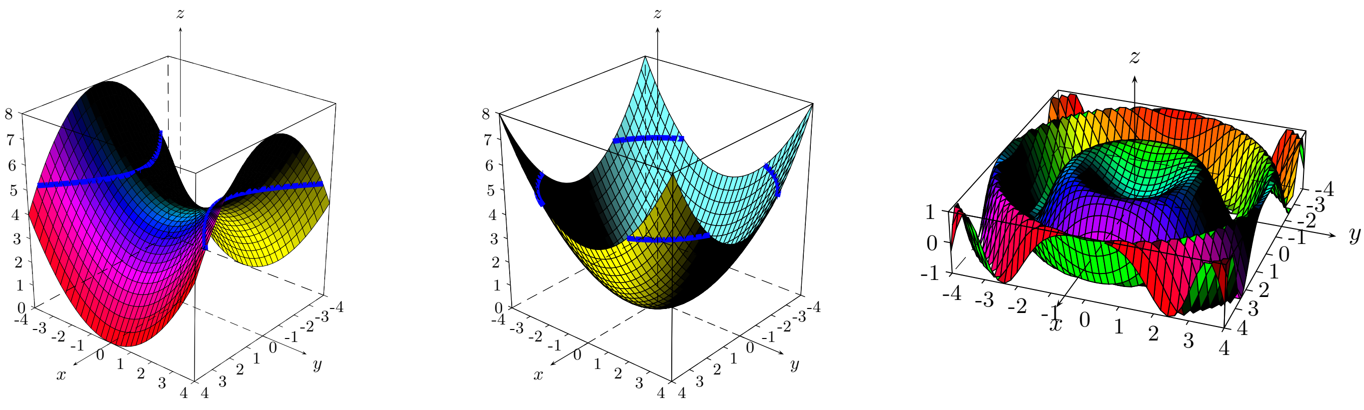
(a) grafom $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{4} + 4$ je sedlo

(b) grafom $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{4}$ je paraboloid s osou z

(c) grafom $f(x, y) = \sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ je typ sinusoidálnej vlny

Problém 1.4.8.

čo je oborom hodnôt funkcií z príkladu 1.4.7?



(a) Funkcia $\frac{x^2-y^2}{4}+4$

(b) Funkcia $\frac{x^2+y^2}{4}$

(c) Funkcia $f(x,y)=\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$

Obr. 1.7: časti grafov funkcií z príkladu 1.4.7

Problém 1.4.9.

$$\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$

V podstate t je uhol medzi $\mathbf{f}(t)$ a osou x. čo je grafom a oborom hodnôt zobrazenia $\mathbf{f}$?

Problém 1.4.10.

$$\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}t\\ t^2\\ t^3\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$

čo je oborom hodnôt zobrazenia $\mathbf{f}$, ako je to s grafom?

Krivky a plochy môžu byť reprezentované niekoľkými spôsobmi. Množina S (dimenzie m) v Euklidovskom priestore môže byť definovaná:

- explicitne v $\mathbb{R}^{m+n}$, ak je grafom funkcie $\mathbf{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$
- parametricky v $\mathbb{R}^n$, ak je oborom hodnôt funkcie $\mathbf{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$

- implicitne v $\mathbb{R}^{m+n}$, ak pre funkciu $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ je S úrovňová funkcia, t.j. pre nejaké $\mathbf{z_0} \in \mathbb{R}^n$ je $S = \{\mathbf{x} \in D_\mathbf{f} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{z_0}\}$

Problém 1.4.11.

Definujte zobrazenia, ktoré definujú hornú jednotkovú polkružnicu so stredom v počiatku v každom z prípadov, t.j. explicitne, parametricky a implicitne.

Pojem limity reálnej funkcie jednej premennej ľahko zovšeobecníme pre vektorové zobrazenia. V tomto kurze budeme pracovať hlavne na množinách, ktoré sú z topologického hľadiska "pekné".

Definícia 1.4.12.

Množinu v $\mathbb{R}^m$ nazývame oblúkovo súvislá (lineárne súvislá), ak jej ľubovoľné 2 body sa dajú spojiť (spojitou) krivkou, ktorá v nej celá leží. Teda $A \subset \mathbb{R}^m$ je oblúkovo súvislá, akk $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ existuje spojité zobrazenie $\mathbf{g} : [0, 1] \to A$ také, že $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x},\ \mathbf{g}(1) = \mathbf{y}$.

Definícia 1.4.13.

Oblasťou v $\mathbb{R}^m$ nazývame otvorenú (oblúkovo) súvislú množinu.

Definícia 1.4.14.

Nech $D \subset \mathbb{R}^m$ je oblasť. Hovoríme, že zobrazenie $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ má v bode $\mathbf{a} \in D_\mathbf{f}$ limitu $\mathbf{b}$ akk,

- $\mathbf{a}$ je hromadný bod $D_\mathbf{f}$
- $\forall \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall \mathbf{x} \in D_\mathbf{f} :\ 0 < \rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \ \Rightarrow\ \rho_n(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{b}) < \epsilon$

ďalej hovoríme, že zobrazenie $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ má v bode $\mathbf{a} \in D_\mathbf{f}$ nevlastnú limitu akk,

- $\mathbf{a}$ je hromadný bod $D_\mathbf{f}$
- $\forall K > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall \mathbf{x} \in D_\mathbf{f} :\ 0 < \rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \ \Rightarrow\ \rho_n(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{0}) > K$

Majme zobrazenie $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, a nech D obsahuje body ľubovoľne vzdialené od $\mathbf{0}$. Potom číslo $\mathbf{b}$ nazývame limitou zobrazenia $\mathbf{f}$ pre $\mathbf{x} \to \infty$ akk,

- $\forall \epsilon > 0\ \exists\, L > 0\ \forall \mathbf{x} \in D_\mathbf{f} :\ \rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{0}) > L \ \Rightarrow\ \rho_n(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{b}) < \epsilon$

Podobne, ako v prípade skalárnych polí, existuje ekvivalentná definícia limity pomocou postupností bodov konvergujúcich k $\mathbf{a}$. Taktiež platia vety o limite súčtu a súčinu funkcií a veta o limite zloženej funkcie.

Pojem spojitosti definujeme opäť analogicky (dokonca analogicky vieme definovať spojitosť zobrazenia medzi dvoma metrickými priestormi).

Definícia 1.4.15.

Hovoríme, že zobrazenie $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ je spojité v bode $\mathbf{x_0}$, akk

- $\forall \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall \mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}} :\ 0 < \rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) < \delta \ \Rightarrow\ \rho_n(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x_0})) < \epsilon$

Teda ak existuje $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ a rovná sa $\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$.

Diferenciál skalárnych polí v bode $\mathbf{x}$ je lineárna funkcia, ktorá ich aproximuje v okolí bodu $\mathbf{x}$. Presnejší výraz je afinné zobrazenie. Označenie $||.||$ je norma, s ktorou sa stretneme neskôr. Zatiaľ nám stačí vedieť, že pre dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si definujeme $||x - y|| := \rho_n(x, y)$. Ako je zvykom, pre zobrazenia budeme používať modernú "derivačnú terminológiu", namiesto o diferenciále hovoríme o derivácii.

Definícia 1.4.16.

Nech $D \subset \mathbb{R}^m$ je oblasť. Hovoríme, že zobrazenie $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľné v bode $\mathbf{x_0} \in D_{\mathbf{f}}$, akk existuje také lineárne zobrazenie $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, že

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \frac{||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})||}{||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}||} = 0.$$

Označenie: $\mathbf{L} = \mathbf{f}'(\mathbf{x_0})$.

Označenie $\mathbf{f}'(\mathbf{x_0})$ bude ovšem korektné, až keď dokážeme jednoznačnosť. Zobrazenie $\mathbf{L}$ nazývame aj totálnym diferenciálom zobrazenia $\mathbf{f}$ v bode $\mathbf{x_0}$ (máme na mysli maticový zápis lineárneho zobrazenia). Označujeme ho aj $\mathbf{df}(\mathbf{x_0})$. Číselná "hodnota" $\mathbf{L}$ je deriváciou zobrazenia v danom bode.

Poznámka 1.4.17.

Ekvivalentný zápis diferencovateľnosti $\mathbf{f}$ v $\mathbf{x_0} \in D$ je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x_0})\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|,$$

kde (spojitá funkcia v $\mathbf{x_0}$) $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) \to 0$ pre $\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}$.

Treba dokázať korektnosť definície - jednoznačnosť diferenciálu.

Veta 1.4.18.

Nech $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x}_0 \in D$. Ak existujú lineárne zobrazenia $\mathbf{L}_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ i = 1, 2$ tak, že

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - \mathbf{L}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|} = 0,\ i = 1, 2,$$

potom $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$.

Nasledujúca veta nám dáva jednoduchší pohľad na diferencovateľnosť vektorových polí.

Veta 1.4.19 (O jednoznačnosti)**.**

Funkcia $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x}_0 \in D$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{x}_0$ $\Leftrightarrow$ ak každá $f_j : D \to \mathbb{R},\ j = 1, 2, \dots, n$ je diferencovateľná (ako skalárna funkcia) v bode $\mathbf{x}_0$.

Medzi lineárnymi zobrazeniami $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a maticami typu $n \times m$ existuje jedno-jednoznačná korešpondencia. Matica

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x_0}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(\mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbf{x_0}) \end{bmatrix}$$

sa nazýva Ostrogradského-Jacobiho matica. Prvky matice $\mathbf{L}$ sú teda parciálne derivácie jednotlivých zložiek zobrazenia $\mathbf{f}$ v bode $\mathbf{x}_0$. V prípade skalárnych polí ($n = 1$) je táto matica vlastne (riadkovým) vektorom - gradientom. Ak $m = 1$, tak stĺpcový vektor je vlastne dotykový vektor ku (parametricky vyjadrenej) krivke.

Definícia 1.4.20.

Ak $m = n$, tak $\det(\mathbf{f}'(\mathbf{x_0}))$ sa volá jakobián zobrazenia $\mathbf{f}$ v bode $\mathbf{x_0}$.

Príklad 1.4.21.

$$\mathbf{f}(t,r) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Jakobián daného zobrazenia je

$$\det(\mathbf{f}'(t,r)) = \begin{vmatrix} \cos(t) & -r\sin(t) \\ \sin(t) & r\cos(t) \end{vmatrix} = r.$$

Veta 1.4.22 (Postačujúca podmienka existencie ”derivácie”)**.**

Nech všetky parciálne derivácie $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ sú funkcie spojité v bode $\mathbf{a}$, potom existuje $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$.

Veta 1.4.23.

Nech $D \subset \mathbb{R}^m$ je oblasť a $\mathbf{f}$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{x_0} \in D$. Nech ďalej E je otvorená množina v $\mathbb{R}^n$, ktorá obsahuje množinu $\mathbf{f}(D)$ a nech $\mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^k$ je funkcia diferencovateľná v bode $\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$. Potom platí, že funkcia $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ z D do $\mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{x_0}$ a $\mathbf{H}'(\mathbf{x_0}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x_0}))\mathbf{f}'(\mathbf{x_0})$.

Dôsledok 1.4.24.

Nech $\mathbf{f}$ je zobrazenie z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{g}$ je zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$. Nech $\mathbf{f}$ má deriváciu v bode $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{g}$ má deriváciu v bode $\mathbf{b} := \mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{h} := \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$. Potom platí

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a}), \quad 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m.$$